Musterlösung 11

1. Sei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

a) Da $T_B \sim \mathcal{N}(-6,4)$, ist $(T_B+6)/4$ standardnormalverteilt. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P[T_B < 0] = P\left[\frac{T_B+6}{4} < \frac{6}{4}\right] = \Phi(6/4) = 0.9332,$$

wie der Tabelle zu entnehmen ist.

b) Die Zufallsvariable $-T_B$ ist $\mathcal{N}(6,4)$-verteilt, da T_B $\mathcal{N}(-6,4)$-verteilt ist. Da T_A und $-T_B$ unabhängig voneinander sind, ist $X = T_A - T_B$ auch wieder normalverteilt, und zwar mit Erwartungswert $0+6=6$ und Standardabweichung $\sqrt{3^2+4^2}=5$, also $X = T_A - T_B \sim \mathcal{N}(6,5)$.

c) Gesucht ist

$$\begin{aligned} P[T_A < T_B] &= P[X<0] = P\left[\frac{X-6}{5} < \frac{-6}{5}\right] \\ &= \Phi(-6/5) = 1-\Phi(6/5) = 1-0.8849 = 0.1151, \end{aligned}$$

wobei wir $\Phi(-z) = 1-\Phi(z)$ verwendet haben.

d)

$$\begin{aligned} P[|X|\le 1] &= P[-1<X<1] = P\left[-\frac{7}{5} < \frac{X-6}{5} < -1\right] = \Phi(-1)-\Phi(-7/5) \\ &= (1-0.8413)-(1-0.9192) = 0.0779. \end{aligned}$$

e) Zu berechnen ist $E[|X|]$. Da $X \sim \mathcal{N}(6,5)$, gilt $X = 5Y+6$, wobei Y eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Demzufolge ist

$$\begin{aligned}
E[|X|] &= E[|5Y+6|] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |5s+6| \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-6/5}^{\infty} (5s+6) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-6/5} (5s+6) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds \\
&= \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-6/5}^{\infty} s \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds - \int_{-\infty}^{-6/5} s \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds \right) \\
&\quad + 6 \left(\int_{-6/5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds - \int_{-\infty}^{-6/5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds \right) \\
&= \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \right]_{-6/5}^{\infty} - \left[-\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \right]_{-\infty}^{-6/5} \right) \\
&\quad + 6\big((1-\Phi(-6/5)) - \Phi(-6/5) \big) \\
&= \frac{10}{\sqrt{2\pi}} \exp(-36/50) + 6\,(1 - 2\Phi(-6/5)) \;=\; 6.561.
\end{aligned}$$

2. **a)** Die Verteilungsfunktion von Z ist, in der zweiten Gleichung verwenden wir die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit,

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P[Z \le z] = P[Z \le z | Y > 0] P[Y > 0] + P[Z \le z | Y \le 0] P[Y \le 0] \\
&= P[X \le z | Y > 0]/2 + P[-X \le z | Y \le 0]/2 \\
&\overset{\text{unabh.}}{=} P[X \le z]/2 + P[X \ge -z]/2 = (\Phi(z) + 1 - \Phi(-z))/2 = \Phi(z),
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung verwendet haben, dass $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ gilt. Also ist Z ebenfalls $\mathcal{N}(0,1)$ normalverteilt.

b) Weil $P[X = 0] = 0$ ist, gilt wegen der Definition von Z,

$$P[X + Z = 0] = P[Z = -X] = P[Y \le 0] = 1/2.$$

c) Nein, denn: wenn X und Z unabhängig wären, müsste für alle Intervalle A und B gelten

$$P[X \in A, Z \in B] = P[X \in A] P[Z \in B].$$

Dies gilt z.B. nicht für $A = [-1, 1]$ und $B = [2, \infty)$, da dann die linke Seite gleich null und die rechte Seite verschieden von null ist.
Alternative Begründung: sonst wäre $X + Z \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{2})$ und damit $P[X + Z = 0] = 0$ in Widerspruch zu **b)**.

d)

$$1 = \int_0^1 \int_0^1 c(a + b^2) da db = c \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + b^2 \right) db = c \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{6} c.$$

Damit findet man $c = \frac{6}{5}$.

Siehe nächstes Blatt!

e) Für die Randdichte von A hat man für $0 \le a \le 1$,

$$f_A(a) = \frac{6}{5}\int_0^1 (a+b^2)db = \frac{6}{5}a + \frac{2}{5}\ .$$

Also hat man

$$f_A(a) = \begin{cases} \frac{6}{5}a + \frac{2}{5}, & 0 \le a \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Randdichte von B hat man für $0 \le b \le 1$,

$$f_B(b) = \frac{6}{5}\int_0^1 (a+b^2)da = \frac{6}{5}b^2 + \frac{3}{5}\ .$$

Also hat man

$$f_B(b) = \begin{cases} \frac{6}{5}b^2 + \frac{3}{5}, & 0 \le b \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

f) Falls A und B unabhängig wären, würde $f_{A,B}(a,b) = f_A(a) \cdot f_B(b)$ gelten, was nicht der Fall ist. Also sind A und B nicht unabhängig.

g)

$$\begin{aligned} P[A \ge B] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{A,B}(a,b)\mathbb{1}_{\{a\ge b\}}dbda = \frac{6}{5}\int_0^1 \left(\int_0^1 (a+b^2)\mathbb{1}_{\{a\ge b\}}db\right) da \\ &= \frac{6}{5}\int_0^1 \left(\int_0^a (a+b^2)db\right) da \\ &= \frac{6}{5}\int_0^1 \left(a^2 + \frac{a^3}{3}\right) da = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. a) Wir berechnen zuerst

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = E[Y]$$

und

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = E[Y^2].$$

Der Flächeninhalt ist $A = XY$. Wegen der Unabhängigkeit von X und Y ist dann

$$E[A] = E[X]E[Y] = \frac{1}{4}$$

und die Kovarianz von A und X

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(A,X) &= E[X^2Y] - E[XY]E[X] \overset{\text{unabh.}}{=} E[X^2]E[Y] - E[X]^2E[Y] \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) Zuerst berechnen wir

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{12} \quad \text{und}$$

$$\mathrm{Var}(A) = E[X^2Y^2] - E[XY]^2 \overset{\text{unabh.}}{=} E[X^2]E[Y^2] - E[X]^2E[Y]^2 = \frac{7}{144}.$$

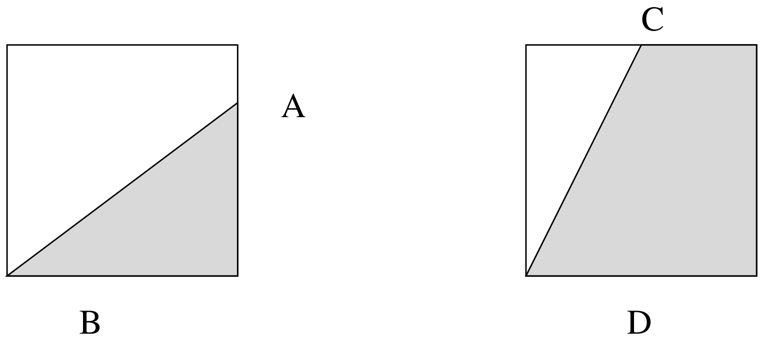
Lineare Prognose von A durch X:

$$\hat{A} = \frac{\mathrm{cov}(A,X)}{\mathrm{Var}(X)}(X - E[X]) + E[A] = \frac{1}{2}X.$$

Lineare Prognose von X durch A:

$$\hat{X} = \frac{\mathrm{cov}(X,A)}{\mathrm{Var}(A)}(A - E[A]) + E[X] = \frac{6}{7}A + \frac{2}{7}.$$

c)



Für $a \geq 0$ bestimmen wir

$$P\left[\frac{Y}{X} \leq a\right] = P[Y \leq aX].$$

Die Menge $\{Y \leq aX\}$ ist die schraffierte Fläche in der obigen Figur. Man sieht, dass

$$P[Y \leq aX] = \begin{cases} \frac{a}{2}, & \text{falls } 0 \leq a \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2a}, & \text{falls } a > 1. \end{cases}$$

Die Dichte erhält man durch Ableiten der Verteilungsfunktion:

$$f(a) = \frac{d}{da}P[Y \leq aX] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } 0 \leq a \leq 1, \\ \frac{1}{2a^2}, & \text{falls } a > 1. \end{cases}$$

4. **a)** Unter der Annahme, dass X eine Poissonverteilung hat, gilt $\lambda = E[X] = \sum_{k\geq 0} kp_k$ mit $p_k = P[X = k]$. Wir approximieren $p_k \approx n_k/N$ und verwenden als Schätzer für λ, wie in Formel (4.0.1) im Skript,

$$\widehat{\lambda} = \sum_{k=1}^{19} k\frac{n_k}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{19} k \cdot n_k}{400} = \frac{\sharp\text{Kolonien}}{\sharp\text{Quadr.}} = 2.44.$$

Siehe nächstes Blatt!

Die erwartete Anzahl Quadrätchen mit k Kolonien ist dann

$$E_k = 400 \cdot P[X = k] \approx 400 \cdot \frac{\widehat{\lambda}^k e^{-\widehat{\lambda}}}{k!} = \widehat{E}_k.$$

b) Aus **a)** erhalten wir folgende Abweichungen:

k	$\widehat{E}_k$	$\widehat{E}_k - N_k$
0	34.86	-21.14
1	85.07	-18.93
2	103.78	23.78
3	84.41	22.41
4	51.49	9.49
5	25.13	-1.87
6	10.22	1.22
7	3.56	-5.44
8	1.09	-3.91
9	0.29	-2.70
10	0.07	-1.93
19	0	-1

Wie man leicht sehen kann, sind die Abweichungen ziemlich gross. Deswegen scheint die Poissonverteilung in diesem Fall nicht zu passen. Um sicher zu gehen, soll nun ein statistischer Test durchgeführt werden.

c) Für die letzte Klasse hat man 11 Beobachtungen, wobei die Anzahl erwartete Beobachtungen nur

$$400 \cdot P[X \geq 8] = 400(1 - P[X \leq 7]) = 400(1 - \sum_{k=0}^{7} P[X = k]) \approx 1.47$$

beträgt.

Somit erhält man folgende Werte:

k	(beob. $-$ erwartet)^2/erwartet
0	12.82
1	4.21
2	5.45
3	5.95
4	1.75
5	0.14
6	0.15
7	8.31
≥ 8	61.64

Der Wert der Chi-Quadrat-Teststatistik beträgt dann

$$T_N = \sum \frac{(\text{beobachtet} - \text{erwartet})^2}{\text{erwartet}} = 100.41.$$

Bitte wenden!

d) Falls T_N zu gross ist (d.h. grösser als einen kritischen Wert a), wird die Hypothese, dass X eine Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = 2.44$ hat, verworfen. Der kritische Wert a ist definiert durch $\int_a^\infty f_8(x)dx = \alpha$, wobei $f_8(x)$ die Dichte einer χ^2-Verteilung mit (Anz. Beobachtungen $-1) = 9 - 1 = 8$ Freiheitsgraden ist. Die Tabelle gibt uns für $\alpha = 1\%$ einen kritischen Wert von $a = 20.090 < 100.41$. Der Test sagt uns also, dass unsere Hypothese wohl nicht stimmt und verworfen werden soll. Analog für $\alpha = 5\%$.

5. **a)** Wir modellieren die Koeffizienten mit $X_1, \ldots, X_n$, $n = 12$, wobei die $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ unabhängig sind. Die Nullhypothese und die alternative Hypothese sind

$$H_0 : \mu = \mu_0 (= 1.0085) \quad \text{und} \quad H_A : \mu = \mu_A (= 1.008).$$

Wir verwenden die Teststatistik $T = \bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, welche unter H_0 die Verteilung $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma/\sqrt{n})$ hat. Wir verwerfen die Nullhypothese H_0, falls $T \leq c_\alpha$ ist, wobei c_α so gewählt ist, dass

$$P[T \leq c_\alpha] = \int_{-\infty}^{c_\alpha} f_T(t)dt = \alpha (= 0.05).$$

Wir finden $t = \bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \approx 1.0076$. Weiter haben wir

$$P[T \leq c_\alpha] = P\left[Z \leq \sqrt{n}\frac{c_\alpha - \mu_0}{\sigma}\right] = \alpha,$$

wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ unter H_0. Laut der Tabelle ist dann $\sqrt{n}\frac{c_\alpha - \mu_0}{\sigma} = -1.645$, also $c_\alpha \approx 1.0078$. Weil nun $t < c_\alpha$ ist, wird die Nullhypothese H_0 verworfen.
Also gehen wir davon aus, dass der Koeffizient durch die Anreicherung mit einem Metall reduziert wird.

b) Die Macht des Tests ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese verworfen wird, gegeben die Alternative ist richtig:

$$\beta = P_A[T \leq c_\alpha] = P_A\left[Z \leq \sqrt{n}\frac{c_\alpha - \mu_A}{\sigma}\right],$$

wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ unter H_A. Wie in **a)** gilt $c_\alpha \approx 1.0078$, also

$$\begin{aligned}\beta = P_A\left[Z \leq \sqrt{n}\frac{c_\alpha - \mu_A}{\sigma}\right] &\approx P_A[Z \leq -0.41] = 1 - P_A[Z \geq -0.41] \\ &= 1 - P_A[Z \leq 0.41] = 1 - 0.6591 = 0.3409,\end{aligned}$$

was nicht so gut ist.

c) Ändern wir μ_A zu $\mu_A = 1.007$, so erhalten wir mit einer analogen Rechnung

$$\beta = P_A\left[Z \leq \sqrt{n}\frac{c_\alpha - \mu_A}{\sigma}\right] \approx P_A[Z \leq 2.07] = 0.98077,$$

was viel besser ist.

Siehe nächstes Blatt!

6. Bemerkung: Beim zweiten Fang beträgt das Verhältnis von Anzahl gefangener Fische zu Anzahl markierter Fische $\frac{15}{5} = 3$. Da markierte und nicht markierte Fische als gut durchmischt sind, können wir dieses beobachtete Misch-Verhältnis von "5 markierte aus total 15" als typische Beobachtung betrachten. Somit ergibt dies bei 10 markierten Fischen total 30 Fische als erste (naive) Schätzung für N.

Sei N die Anzahl Fische im Teich und X die Anzahl markierter Fische beim zweiten Fang. Es gibt $\binom{N}{15}$ Möglichkeiten 15 Fische zu fangen. Dabei gibt es $\binom{10}{5}\binom{N-10}{10}$ Möglichkeiten 5 markierte Fische zu fangen. Nach dem Laplace Model gilt daher

$$P_N\big(X = 5\big) \quad = \quad \frac{\binom{10}{5}\binom{N-10}{10}}{\binom{N}{15}} \quad = \quad \frac{15!}{5!5!} \frac{(N-15)(N-16)\dots(N-19)}{N(N-1)\dots(N-9)}.$$

Weil insgesamt 10 Fische markiert wurden, beim zweiten Fang aber nur 5 dieser Fische gefangen wurden, gibt es total mindestens 20 Fische, also $N \geq 20$. Um den obigen Ausdruck zu maximieren, betrachten wir

$$g(N) \stackrel{def}{=} \frac{P_N\big(X = 5\big)}{P_{N+1}\big(X = 5\big)} = \frac{(N-19)(N+1)}{(N-14)(N-9)}$$

für $N \geq 20$. Wenn $g < 1$, dann ist $P_N\big(X = 5\big)$ wachsend als Funktion von N, sonst nicht wachsend. Setzt man $g(N) = 1$ sieht man mit einer einfachen Rechnung, dass $g(29) = 1$ und auch $g(N) > 1 \Leftrightarrow N > 29$. Also wird die Wahrscheinlichkeit $P_N\big(X = 5\big)$ für $N = 29$ und $N = 30$ maximiert. (Wegen $g(29) = 1$ gilt $P_{29}\big(X = 5\big) = P_{30}\big(X = 5\big)$.)

7. **a)** Ein "natürlicher" Schätzer $\widehat{m}$ von $m = E[X]$ ist das empirische Mittel

$$\widehat{m} = \bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Denn: bei der Einführung des Erwartungswertes auf Seite 34 im Skript wurde erklärt, dass $\bar{X}_n \approx E[X]$ für grosse n.

b) Mit der selben Überlegung und der Identität $\mathrm{Var}(X) = E[(X-m)^2]$ finden wir als "natürlichen" Schätzer für σ^2,

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \widehat{m})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2,$$

wobei wir für m den Schätzer $\widehat{m}$ aus **a)** verwendet haben.

c) Wir berechnen

$$\begin{aligned}(X_j - \widehat{m})^2 \quad &= \quad \left(X_j - \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)^2 \;=\; X_j^2 - \frac{2}{n}X_j\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 \\ &= \quad X_j^2 - \frac{2}{n}X_j^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1,\, i\neq j}^n X_j X_i + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1,\, j\neq i}^n X_i X_j\right).\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Um den Erwartungswert davon zu bestimmen, benützen wir die Linearität des Erwartungswertes und die Tatsache, dass $E[X_iX_j] = E[X_i]E[X_j] = E[X]E[X] = m^2$ für $i \neq j$, was aus der Unabhängigkeit der X_i's folgt. Also

$$\begin{aligned}
E\left[(X_j - \widehat{m})^2\right] &= E[X^2] - \frac{2}{n}E[X^2] - \frac{2}{n}(n-1)m^2 + \frac{1}{n^2}\left(nE[X^2] + n(n-1)m^2\right) \\
&= E[X^2]\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\right) - m^2\left(\frac{2}{n}(n-1) - \frac{n-1}{n}\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\left(E[X^2] - m^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.
\end{aligned}$$

d) Es ist

$$\begin{aligned}
E\left[\widehat{\sigma}^2\right] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \widehat{m})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E\left[(X_j - \widehat{m})^2\right] \\
&\overset{\text{c)}}{=} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2.
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert vom Schätzer $\widehat{\sigma}^2$ entspricht nicht genau dem echten Wert σ^2. Multiplizieren wir $\widehat{\sigma}^2$ mit $n/(n-1)$ so erhalten wir den Schätzer

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2,$$

welcher nun erwartungstreu ist, das heisst $E[s^2] = \frac{n}{n-1}E[\widehat{\sigma}^2] = \sigma^2$.

BEMERKUNG: Ist m unbekannt, so wird in den meisten Anwendungen die Varianz mit s^2 statt mit $\widehat{\sigma}^2$ geschätzt.

8. a) Damit f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt, muss gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.$$

Für ein vorgegebenes η muss also gelten

$$1 = \int_0^{\infty} ce^{-\eta x}dx = \frac{-c}{\eta}e^{-\eta x}\Big|_0^{\infty} = \frac{c}{\eta},$$

also $c = \eta$, d.h. X hat eine Exponentialverteilung mit Parameter $\eta > 0$.

b) Der Erfolgsparameter p ist gegeben durch $p = P[X > 10]$, wobei $X \sim Exp(\eta)$. Für $X \sim Exp(\eta)$ ist, für $x > 0$, $F_X(x) = P[X \leq x] = 1 - e^{-\eta x}$ und damit

$$p = P[X > 10] = e^{-10\eta}.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Es gilt $f(l;p) = P[L = l] = p(1-p)^{l-1}$ für eine geometrisch-verteilte Zufallsvariable $L \sim Geom(p)$. Allgemein haben wir somit für n beobachtete Werte $l_1, \ldots, l_n$ die folgende Likelihood-Funktion:

$$L(l_1, \ldots, l_n; p) = \prod_{i=1}^{n} f(l_i; p) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{l_i - 1}.$$

Die Log-Likelihood-Funktion ist somit gegeben durch

$$\ell(l_1, \ldots, l_n; p) = n \log p + \sum_{i=1}^{n} (l_i - 1) \log(1-p).$$

Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial p} \ell(l_1, \ldots, l_n; p) = 0 \Longleftrightarrow n/p + \sum_{i=1}^{n} (l_i - 1) \frac{-1}{1-p} = 0.$$

Auflösen nach p (und Ersetzen der Realisierungen l_i durch die zugehörigen Zufallsvariablen L_i) liefert den Maximum-Likelihood-Schätzer für p,

$$p_{MLE} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} L_i \right)^{-1}.$$

Für den Schätzwert erhalten wir durch Einsetzen der insgesamt $n = 6$ Werte aus der Tabelle $\widehat{p}_{MLE} = \left(\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} l_i \right)^{-1} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8} = 0.125$.

BEMERKUNG: Der "natürliche" Schätzer von $E[L]$ ist nach Aufgabe 1 **a)**, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} L_i$. Wegen $E[L] = p^{-1}$ ist also der "natürliche" Schätzer von p, $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} L_i \right)^{-1}$, was dem Maximum-Likelihood-Schätzer für p entspricht.

BEMERKUNG: Weiter bemerken wir, dass wir mit Hilfe des Schätzers p_{MLE} von p einen Schätzer $\hat{\eta}$ von η erhalten. Denn aus **b)** folgt, dass $p = e^{-10\eta}$, also $\hat{\eta} = -\log(p_{MLE})/10$.

9. Da wir eine stetige Verteilung haben, ist die Likelihood-Funktion das Produkt der Dichten:

$$\begin{aligned} L(\alpha, X_1, \ldots, X_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_X(X_i) = \exp\left(n\alpha - \sum_{i=1}^{n} X_i \right) \cdot \prod_{i=1}^{n} 1_{[\alpha,\infty)}(X_i) \\ &= \exp\left(n\alpha - \sum_{i=1}^{n} X_i \right) \cdot 1_{\{\min_{1 \le i \le n} X_i \ge \alpha\}}. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist positiv, falls alle X_i grösser oder gleich α sind. Unter dieser Bedingung maximieren wir diese Funktion genau dann, wenn wir $n\alpha - \sum_{i=1}^{n} X_i$ maximieren. Also ist der Maximum-Likelihood-Schätzer gegeben durch

$$\widehat{\alpha} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Der Schätzwert beträgt somit 3.1. Wir bemerken, dass sowieso $\min\{X_1, \ldots, X_n\} \ge \alpha$ gilt; also überschätzt $\widehat{\alpha}$ den wahren Wert α.

Bitte wenden!

10. **a)** Es sei U die Zufallsvariable, die die gewählte Urne bezeichnet. Somit ist $P[U = A] = p$ und $P[U = B] = 1 - p$. Mit X bezeichnen wir die Farbe der gewählten Kugel. Somit gilt $P[X = w|U = A] = \frac{1}{5}$ und $P[X = w|U = B] = \frac{3}{5}$. Daher erhält man mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit,

$$\begin{aligned} p_W(p) = P[X = w] &= P[X = w|U = A]P[U = A] + P[X = w|U = B]P[U = B] \\ &= \frac{1}{5}p + \frac{3}{5}(1 - p) \\ &= \frac{1}{5}(3 - 2p). \end{aligned}$$

b) Es seien $X_1, \ldots, X_{10}$ die unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen, die die Farben der gewählten Kugeln bezeichnen, und

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{10}) = (w, s, w, s, s, s, w, s, w, w)$$

die gegebene Folge. Dann ist $P[X_i = w] = p_W(p)$ und $P[X_i = s] = 1 - p_W(p)$, $i = 1, \ldots, 10$, und aus der Unabhängigkeit der X_i folgt

$$P[(X_1, \ldots, X_{10}) = \mathbf{x}] = \prod_{i=1}^{10} P[X_i = x_i] = p_W(p)^5 \,(1 - p_W(p))^5 .$$

Die Likelihood-Funktion $L(p, \mathbf{x})$ ist somit

$$L(p, \mathbf{x}) = p_W(p)^5 \,(1 - p_W(p))^5 .$$

Um $\log L(p, \mathbf{x})$ zu maximieren, differenzieren wir nach p:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \log L(p, \mathbf{x}) &= \frac{d}{dp} \left(5 \log p_W(p) + 5 \log(1 - p_W(p))\right) \\ &= -\frac{2}{p_W(p)} + \frac{2}{1 - p_W(p)}, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{(dp)^2} \log L(p, \mathbf{x}) = -\frac{4}{5p_W(p)^2} - \frac{4}{5(1 - p_W(p))^2} < 0.$$

Die Funktion $L(., \mathbf{x})$ ist also strikt konkav und erreicht ihr Maximum an der Stelle $\hat{p}$, falls $\hat{p} \in (0, 1)$ die Gleichung $-\frac{2}{p_W(\hat{p})} + \frac{2}{1 - p_W(\hat{p})} = 0$ erfüllt. Lösen wir diese Gleichung nach $\hat{p}$ auf, so erhalten wir

$$\begin{aligned} p_W(\hat{p}) &= 1 - p_W(\hat{p}) \\ \Leftrightarrow p_W(\hat{p}) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5}(3 - 2\hat{p}) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \hat{p} &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Somit ist der Maximum-Likelihood-Schätzerwert für p gleich $\hat{p} = \frac{1}{4}$.

Siehe nächstes Blatt!

11. Das Experiment wird entweder nach endlicher Zeit abgebrochen (nämlich wenn eine 6 gewürfelt wird) oder man würfelt unendlich lange. Also definieren wir

$$\begin{aligned} E_n &= \{(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, 6) : \omega_i \in \{1, \dots, 5\}, 1 \leq i \leq n-1\} \\ E_\infty &= \{1, \dots, 5\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i \in \{1, \dots, 5\}, \forall\, i \geq 1\} \end{aligned}$$

Damit lässt sich der Grundraum als

$$\Omega = \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \Big) \cup E_\infty$$

darstellen. Beachten Sie, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ äquivalente Notationen sind und deshalb dieselbe Menge bezeichnen (insbesondere ist E_∞ in der Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ nicht enthalten). Also stellt

$$\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \Big)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n^c = E_\infty$$

das Ereignis "Es wird nie eine 6 gewürfelt" dar.

12. **a)** Die gesuchte Anzahl entspricht der Anzahl Möglichkeiten, 5 Karten aus den 52 Karten auszuwählen, also $\binom{52}{5} = 2'598'960$.

b) Von jeder Farbe gibt es 13 Karten, wobei die Anzahl Möglichkeiten, 5 Karten aus 13 Karten auszuwählen, $\binom{13}{5}$ beträgt. Da die Art der Farbe keine Rolle spielt, beträgt die gesuchte Anzahl $4 \cdot \binom{13}{5} = 5'148$.

c) Da alle Hände gleich verteilt sind, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0.002$.

d) Die Anzahl der Hände ist $13 \cdot 48 = 624$: der Faktor 13 widerspiegelt die Arte des Vierlings und der Faktor 48 entspricht der Anzahl Karten, die die Hand vervollständigen können (alle übrigen Karten).

e) Da sich eine Dame in der erhaltenen Hand befindet, kommen nur Vierlinge vom Typ König oder Ass in Frage. Ein solches Vierling plus die 5 Karten in der Hand ergeben 9 Karten. Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt also $2 \cdot (52 - 9) = 86$.

13. Nach Annahme gilt, dass $P(X_s = x) = \frac{1}{3}$ für alle $x \in \{$Pizza, Getränk, Dessert$\}$ und für alle $s \geq 1$. Wir definieren das Ereignis $A_{x,y} =$ „Der erste erhaltene Typ ist x und der zweite Typ ist y", für $x \neq y \in \{$Pizza, Getränk, Dessert$\}$. Bemerke, dass die $A_{x,y}$ eine Partition von Ω bilden, d.h. $A_{x,y} \cap A_{\tilde{x},\tilde{y}} = \emptyset$ falls $x \neq \tilde{x}$ oder $y \neq \tilde{y}$, und $\bigcup_{x,y:x\neq y} A_{x,y} = \Omega$. Daher gilt

$$\{T_2 - T_1 = i, T_3 - T_2 = j\} = \bigcup_{x,y:x\neq y} \{T_2 - T_1 = i, T_3 - T_2 = j, A_{x,y}\},$$

wobei die Ereignisse paarweise disjunkt sind. Wir schreiben

$$\{T_2 - T_1 = i, T_3 - T_2 = j, A_{x,y}\} = \left(\bigcap_{s=1,\ldots,i} \{X_s = x\}\right) \cap \{X_{i+1} = y\}$$
$$\cap \left(\bigcap_{s=i+2,\ldots,i+j} \{X_s = x\} \cup \{X_s = y\}\right) \cap \{X_{i+j+1} \notin \{x, y\}\}.$$

D.h. wir schreiben $\{T_2 - T_1 = i, T_3 - T_2 = j, A_{x,y}\}$ als Schnitte von Ereignissen, welche nach Voraussetzung unabhängig sind. Jedes Ereignis in diesen Schnitten ist wiederum zerlegt in unabhängige Ereignisse. Es gilt daher

$$P(T_2 - T_1 = i, T_3 - T_2 = j, A_{x,y}) = \left(\frac{1}{3}\right)^i \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \times \frac{1}{3}.$$

Weil die Ereignisse $\{T_2 - T_1 = i, T_3 - T_2 = j, A_{x,y}\}$, $x \neq y$, eine Partition von $\{T_2 - T_1 = i, T_3 - T_2 = j\}$ bilden, gilt somit

$$\begin{aligned}
P(T_2 - T_1 = i, T_3 - T_2 = j) &= \sum_{x,y:x\neq y} P(T_2 - T_1 = i, T_3 - T_2 = j, A_{x,y}) \\
&= \sum_{x,y:x\neq y} \left(\frac{1}{3}\right)^i \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{3!}{(3-2)!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^i \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \times \frac{1}{3} \\
&= 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^i \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \times \frac{1}{3} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \times \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Andererseits, weil $\{T_3 - T_2 = j\}_{j=1,2,\ldots}$ ebenfalls eine Partition von Ω ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
P(T_2 - T_1 = i) &= \sum_{j=1}^{\infty} P(T_2 - T_1 = i, T_3 - T_2 = j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \times \frac{1}{3} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \times \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der Identität $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ für alle $r \in (0, 1)$ folgt. In gleicher Weise erhalten wir

$$P(T_3 - T_2 = j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \times \frac{1}{3}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir haben nun gezeigt, dass

$$P(T_2 - T_1 = i, T_3 - T_2 = j) = P(T_2 - T_1 = i)P(T_3 - T_2 = j),$$

woraus die Unabhängigkeit der Ereignisse folgt.

Bemerke, dass die Zufallsvariablen $(T_2 - T_1)$ und $(T_3 - T_2)$ geometrisch verteilt sind mit Parametern $p = \frac{2}{3}$ bzw. $p = \frac{1}{3}$.

14. Es sei die Zufallsvariable X die gewürfelte Augenzahl. Dann gilt für die 4 fairen Würfel $P[X = k] = 1/6$ für $k = 1, 2, \ldots, 6$. Bei den zwei gefälschten Würfeln gilt $P[X = 6] = 3/8$ und somit $P[X = i] = 1/8$ für $i = 1, 2, \ldots, 5$. Sei A das Ereignis, dass der gezogene Würfel gefälscht war.

a) Gesucht ist $P[X = 6]$. Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned} P[X = 6] = P[X = 6,\ A^c] + P[X = 6,\ A] &= P[X = 6|A^c]P[A^c] + P[X = 6|A]P[A] \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} = \frac{17}{72}. \end{aligned}$$

b) Gesucht ist $P[A|X = 6]$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit (bzw. der Formel von Bayes) hat man

$$P[A|X = 6] = \frac{P[A \cap \{X = 6\}]}{P[X = 6]} = \frac{P[X = 6|A]P[A]}{P[X = 6]} \overset{a)}{=} \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{17}{72}} = \frac{9}{17}.$$

c) T ist geometrisch verteilt mit Parameter $p = P[X = 3]$. Also ist

$$P[T = m] = (1 - p)^{m-1}p, \quad \text{für } m = 1, 2, \ldots,$$

wobei der Erfolgsparameter gegeben ist durch

$$p = P[X = 3] = P[X = 3|A^c]P[A^c] + P[X = 3|A]P[A] = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{6} = \frac{11}{72}.$$

d) Die Formel (2.2.3) im Skript besagt, dass $E[T] = 1/p$ ist.

e) Weil der Würfel nur beim ersten Mal zufällig gewählt wird, ist $P[T = k]$ für $k = 1, 2, \ldots$ gegeben durch

$$\begin{aligned} P[T = k] &= P[T = k|A^c]P[A^c] + P[T = k|A]P[A] \\ &= (1 - p_{A^c})^{k-1}p_{A^c}\frac{4}{6} + (1 - p_A)^{k-1}p_A\frac{2}{6}, \end{aligned}$$

wobei $p_{A^c} = P[X = 3|A^c] = 1/6$ und $p_A = P[X = 3|A] = 1/8$.